

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications, 2025-2026
ANALYSE 3

Feuille de TD n°1

Langage mathématique, propriétés des réels.

Les questions ou exercices annotés par un ♣ sont d'un niveau plus difficile que celui attendu pour l'examen.

Exercice 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}_-, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}^*, x + y > 0$.
6. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.

Exercice 2

Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes et leur négation.

1. A est stable par addition.
2. A est strictement inclus dans B .
3. L'intersection de A et B est vide.
4. Aucun élément de A ne minore B .
5. Si A est majoré, alors B est inclus dans A .
6. A est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < c < d$.

1. Montrer que $[a, b] \cup [c, d]$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $]a, b[\cup]c, d[$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$. Illustrer graphiquement votre raisonnement.

Exercice 4 (Cours : caractérisations des relations d'ordre)

On illustrera graphiquement les assertions des questions 1 et 2 suivantes.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $x < y$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$, $x + \varepsilon < y$.
Réécrire cette assertion avec des quantificateurs. Discuter du cas où toutes ces variables sont des entiers.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \leq y$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $x < y + \varepsilon$.
3. Donner un énoncé semblable pour caractériser $x \geq y$ à l'aide d'inégalités strictes.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'assertion

$$x = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon.$$

Exercice 5

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\min(x, y) = -\max(-x, -y)$.
2. Montrer que $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ après avoir illustré graphiquement cette formule.
3. Déterminer graphiquement une formule similaire pour exprimer $\min(x, y)$ puis la démontrer à l'aide des questions précédentes.

Exercice 6 (Cours : inégalité triangulaire)

Soient $x, y, M \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $|x| \leq M$ si et seulement si $-M \leq x \leq M$ (remarquer que nécessairement $M \geq 0$).
2. En déduire l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire $|x + y| \leq |x| + |y|$.
3. Montrer que $|x| \leq |x + y| + |y|$ et en déduire l'inégalité triangulaire inverse, c'est-à-dire $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Exercice 7 (Moyenne pondérée)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$. Soient $c_1, c_2, \dots, c_n$ des coefficients positifs non tous nuls. La moyenne pondérée des données $x_1, x_2, \dots, x_n$ par les coefficients $c_1, c_2, \dots, c_n$ est donnée par

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n c_i x_i}{\sum_{i=1}^n c_i}.$$

1. Montrer que y est bien défini et que $\min(A) \leq y \leq \max(A)$.
2. Montrer qu'il existe $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ et tels que y soit également la moyenne pondérée des données $x_1, x_2, \dots, x_n$ par les coefficients $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Exercice 8

Soient a et b deux réels strictement positifs. Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles A suivants :

1. $A = [-6, -2] \cup [-1, 3] \cup [5, 9]$.
2. $A =]-\infty, 0] \cup \{1\}$.
3. $A = \{a + nb / n \in \mathbb{N}\}$.
4. $A = \{x \in \mathbb{R} / x^4 + 3 \leq 0\}$.
5. $A = \{a + (-1)^n b / n \in \mathbb{N}\}$.
6. Représenter $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \max(|x|, |y|) \leq 1\}$; $A = \{\|(x, y)\|_2 / (x, y) \in C\}$.

Exercice 9 (Cours : lien entre maximum et borne supérieure)

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et $\max(A) = \sup(A)$.

Exercice 10

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants. Illustrer graphiquement les parties techniques de vos raisonnements.

1. $A = [0, 1[$.
2. $A =]-1, 1] \cup \{\pi\}$.
3. $A = [0, 1[\setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ avec $x_1, x_2, x_3 \in]0, 1[$.
4. ♣ $A = \{\|(x, y, z)\| / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1\}$.

Exercice 11 (Cours : classification des intervalles de $\mathbb{R}$)

L'objectif de cet exercice est de démontrer les points principaux du résultat suivant. Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ entre dans l'une des 10 catégories suivantes :

1. $I = \emptyset$,
2. I n'est ni majoré, ni minoré : $I = \mathbb{R}$,
3. I est majoré mais non minoré :
 - a) si I a un maximum : $I =]-\infty, a]$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,
 - b) si I n'a pas de maximum : $I =]-\infty, a[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,
4. I est minoré mais non majoré :
 - a) si I a un minimum : $I = [a, +\infty[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,
 - b) si I n'a pas de minimum : $I =]a, +\infty[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,
5. I est borné :
 - a) si I a un minimum et un maximum : $I = [a, b]$ pour $a \leq b \in \mathbb{R}$,
 - b) si I a un minimum et pas de maximum : $I = [a, b[$ pour $a < b \in \mathbb{R}$,
 - c) si I a un maximum et pas de minimum : $I =]a, b]$ pour $a < b \in \mathbb{R}$,
 - d) si I n'a ni minimum ni maximum : $I =]a, b[$ pour $a < b \in \mathbb{R}$.

Considérons un intervalle $I \neq \emptyset$.

1. Démontrer que si I n'est ni majoré, ni minoré, alors $I = \mathbb{R}$.
2. Démontrer que si I est minoré, non majoré et n'a pas de minimum, alors $I =]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

3. Démontrer que si I a un minimum et maximum, alors $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$.

Exercice 12 (Cours : caractérisation de la borne inférieure)

L'objectif de cet exercice est de démontrer la caractérisation de la borne inférieure.

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les deux points suivants :

- (1) A admet une borne inférieure et $m = \inf(A)$.
- (2) Le réel m satisfait :
 - a) m est un minorant de A ,
 - b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $m \leq a_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Application : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Utiliser la caractérisation de la borne inférieure pour déterminer $\inf(]a, b[)$ et en déduire que $\min(]a, b[)$ n'existe pas.

Exercice 13

Soient $m \in \mathbb{R}$, A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $B = A \cap]m, m+1]$. On suppose que B est non vide, que $\inf A = m$ et que $m \notin A$. Montrer que $\inf B = m$. Que dire si $m \in A$?

Exercice 14

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leq \sup(B)$.
2. Montrer que $A \cup B$ est majorée, puis que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
3. Supposons $A \cap B \neq \emptyset$. Démontrer que $A \cap B$ est majorée, puis que $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$.
Donner un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.

2. En déduire la limite de $(E(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ quand plus généralement $\ell \notin \mathbb{Z}$.
3. On considère le cas particulier $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Étudier la convergence de la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - b) Montrer que $(E(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite divergente.

Exercice 6 (Cours : opérations sur les suites convergentes)

Soit u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$.
2. Montrer que la suite produit $uv = (u_n v_n)_{n \geq 0}$ est convergente de limite $\ell \ell'$.
3. Supposons de plus $\ell' \neq 0$, montrer que :
 - a) v est non nulle à partir d'un certain rang, en accompagnant le raisonnement d'un graphe l'illustrant,
 - b) la suite inverse de terme général $\frac{1}{v_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang et est convergente, de limite $\frac{1}{\ell'}$,
 - c) la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang et est convergente, de limite $\frac{\ell}{\ell'}$.

Exercice 7 (Théorème de Cesàro)

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On considère la suite $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

1. Que représente, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le terme S_n ? Que vaut S si u est constante ?
2. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
 - a) Montrer que S est bornée.
 - b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ et $M_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, tels que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on ait

$$|S_n| < \frac{M_\varepsilon}{n} + \varepsilon.$$

- c) En déduire que S converge vers 0.
3. On suppose maintenant que u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que S converge aussi vers ℓ . Commenter.
4. On suppose que $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que dire de S ? Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 8 (Cours : opérations sur les suites divergentes)

Soit u et v deux suites réelles.

1. Montrer que si u converge vers $\ell > 0$ et v tend vers $+\infty$, alors le produit uv tend vers $+\infty$.
2. Si u tend vers $+\infty$ et v tend vers $-\infty$, alors uv tend vers $-\infty$.
3. Si u converge vers ℓ et si v tend vers $+\infty$, alors la suite des quotients $\frac{u}{v} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bien définie à partir d'un certain rang et est une suite convergente, de limite 0.
4. Soit u et v deux suites réelles. Si u est minorée et si v tend vers $+\infty$, alors $u + v$ tend vers $+\infty$. En particulier, si u est convergente et si v tend vers $+\infty$, alors $u + v$ tend vers $+\infty$.

Exercice 9

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. Le produit de deux suites monotones est monotone.
2. Si l'assertion suivante est satisfaite pour une suite u et un réel ℓ donnés

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon,$$

alors la suite u est constante.

3. Une suite réelle positive est soit convergente, soit tend vers $+\infty$.
4. Si les suites u et v ne sont pas bornées alors la suite uv n'est pas bornée.
5. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et tend vers 1 alors tous ses termes sont positifs.

6. Si l'assertion suivante est satisfaite pour une suite u et un réel ℓ donnés

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

alors la suite u est bornée.

7. Si la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ ou $-\ell$.

8. Si la suite $(u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

9. Toute suite convergente peut s'écrire comme la somme de deux suites divergentes.

10. Si l'assertion suivante est satisfaite pour une suite u et un réel ℓ donnés

$$\exists \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

alors la suite u est bornée.

11. Si v est une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 et u est une suite convergeant vers $\ell \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est une suite non bornée.

12. Si la suite u n'est pas majorée alors elle a pour limite $+\infty$.

13. Si l'assertion suivante est satisfaite pour une suite u et un réel ℓ donnés

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

alors la suite u est stationnaire.

14. Toute suite positive qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 10 (Cours : caractérisation séquentielle de la borne supérieure)

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.

1. Montrer l'équivalence entre

(1) $S = \sup(A)$.

(2) a) S est un majorant de A ,

b) il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers S .

2. Application. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée. Montrer qu'il existe une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. Donner un exemple d'une fonction f et d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergente mais satisfaisants l'assertion précédente.

Exercice 11 (Le retour des séries)

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. Rappeler ce que signifie le fait que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge, puis diverge.

2. Montrer que si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge, alors son reste, i.e. la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, converge vers 0.

3. On suppose maintenant que u et v sont des suites à termes positifs et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

a) Montrer que si $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

b) Montrer que si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ diverge.

c) Ces résultats sont-ils encore vraies si les hypothèses sur u et v ne sont valables qu'à partir d'un certain rang ?

Exercice 12

Soient $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ et $p \geq q > 0$. On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{pu_n + qv_n}{p+q} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{qu_n + pv_n}{p+q}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, interpréter u_{n+1} et v_{n+1} en terme de moyennes et en déduire un encadrement (pour chacun).

2. Étudier les suites $u + v$ et $u - v$.

3. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

4. En déduire leur limite.

Exercice 13

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = 1 - (x + x^2 + \dots + x^n)$.

1. On souhaite étudier le comportement des zéros de P_n sur $\mathbb{R}_+$.
 - a) Tracer sur $\mathbb{R}_+$ l'allure du graphe de $Q_n : x \mapsto x + x^2 + \dots + x^n$ (pour un n assez grand). En déduire celui de P_n . Conjecturer le nombre de zéro de P_n sur $\mathbb{R}_+$.
 - b) Étudier les variations de P_n sur $[0, +\infty[$.
 - c) En déduire qu'il existe un unique $u_n > 0$ tel que $P_n(u_n) = 0$.
2. On note, à partir de maintenant, $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et $P_n(u_n) = 0$. On souhaite montrer que u converge.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1}(u_n) < P_{n+1}(u_{n+1})$.
 - b) En déduire que u est strictement décroissante.
 - c) En déduire que u est convergente.
3. On souhaite déterminer la limite de u .
 - a) Calculer u_2 . En déduire alors que $u_n^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 - b) Rappeler comment calculer $\sum_{k=0}^n r^k$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2(1 - u_n) = 1 - u_n^{n+1}$.
 - c) En déduire la limite de u .

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications, 2025-2026
ANALYSE 3

Feuille de TD n°3

Suites réelles et complexes : comportement asymptotique.

Exercice 1 (Cours : opérations sur les o)

Soient u, v, w trois suites réelles. Illustrer puis montrer les propriétés suivantes.

1. Transitivité des “ o ” : $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n), v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \Rightarrow u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$.
2. Stabilité des “ o ” par addition : $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n), w_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow u_n + w_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.
3. Stabilité des “ o ” par produit : $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow u_n w_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n w_n)$.

Exercice 2 (Cours : quelques règles de calcul sur les équivalents)

Soient u, v, w, t quatre suites réelles. Illustrer puis montrer les propriétés suivantes.

1. Transitivité : $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n, v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} w_n \Rightarrow u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.
2. Passage à la puissance : $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \Rightarrow u_n^\alpha \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$. On se placera dans le cas où u est strictement positive APCR.
3. Produit terme à terme : $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n, w_n \sim_{n \rightarrow +\infty} t_n \Rightarrow u_n w_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n t_n$.

Exercice 3

Donner des équivalents simples des quantités suivantes.

1. $u_n = ((n+1)!) \cos(n+1)$
2. $u_n = \ln\left(\frac{n!-1}{n!}\right) - \frac{1}{(2n)!}$
3. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right) + e^{-n}$
4. $u_n = \tan\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right) - \frac{1}{n^n}$
5. $u_n = \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}$
6. $u_n = n^2 e^{\frac{n}{2}} + (n-1)^3 e^{\frac{n}{3}}$

Exercice 4 (Développement asymptotique de la série harmonique)

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ la somme partielle de la série harmonique.

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.
 - a) Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_{n+1} - a_n)$ converge. On dit que la nature d'une suite est la même que sa série des différences.
 - b) Montrer que la suite $a = \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 0}$ converge mais que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_{n+1} - a_n)$ est absolument divergente. Est-ce en contradiction avec l'équivalence précédente ?
2. a) Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note γ cette limite. C'est la constante d'Euler-Mascheroni.
 b) En déduire que $H_n = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$. On dit que c'est un développement asymptotique.
3. a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\min\{k \in \mathbb{N}^* / H_k > n\}$ est bien défini. On note cet élément $r_n \in \mathbb{N}^*$. Que valent r_1, r_2 ?
 b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n \geq 2$.
 c) Montrer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et donner sa limite. Indication : on pourra raisonner par l'absurde.
 d) Donner un équivalent de $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. En déduire que

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e.$$

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications, 2025-2026
ANALYSE 3

Feuille de TD n°4

Suites réelles et complexes : suites extraites, suites de Cauchy. Rappels et compléments sur les séries.

Exercice 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u tend vers $+\infty$, resp. $-\infty$, alors toute suite extraite de u tend vers $+\infty$, resp. $-\infty$.

Exercice 2

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites convergentes. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = v_{2n+1}$. Montrer que u et v tendent vers la même limite.

Exercice 3

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe φ une extractrice telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)} - \ell| < 2^{-n}$.

Exercice 4

Soit u une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

- (1) u ne converge pas vers ℓ ,
- (2) il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une extractrice φ , tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \notin]\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0[$.

Exercice 5

Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \arctan((-1)^n n)$.

1. Tracer le graphe de u (on pourra commencer par les graphes des fonctions $x \mapsto \arctan(x)$ et $x \mapsto \arctan(-x)$).
2. Donner deux valeurs d'adhérences de u .
3. Montrer que ce sont les seules.

Exercice 6 (Cours)

Soit u une suite réelle, bornée et qui admet une unique valeur d'adhérence $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer qu'elle converge vers ℓ .

Exercice 7

Soit u une suite réelle.

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.
 - (a) ℓ est une valeur d'adhérence de u .
 - (b) Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} / |u_n - \ell| < \varepsilon\}$ est infini.
 - (c) Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
2. On suppose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.

Exercice 8

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u(\mathbb{N})$ soit un ensemble fini.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est inclus dans $u(\mathbb{N})$.
2.
 - a) Montrer que l'inclusion réciproque est fausse en général.
 - b) Proposer une condition additionnelle sur u pour que cette réciproque devienne vraie.
 - c) Application : soit u une suite N -périodique avec $N \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de u .

Exercice 9

On définit la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que les suites $v = (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $w = (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ell \leq w_n$.
2. Montrer alors que u converge vers ℓ . Quel résultat sur les séries vient-on de redémontrer à travers l'étude de ce cas particulier ?
3. On considère la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $R_n = \ell - u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|R_n| \leq \frac{1}{n+1}$. *Indication : on pourra utiliser l'inégalité de la question 1., et faire un dessin en représentant les quantités $u_{2n}, u_{2n+1}, \ell, R_{2n}, u_{2n+1} - u_{2n}$.*

Exercice 10 (Produit de Cauchy)

1. Soit u une suite réelle. Montrer que si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.
2. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries. On définit le *produit de Cauchy*¹ des deux séries précédentes comme la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n, \quad \text{où } \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j$$

Notons U , resp. V , resp. W , la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, resp. $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$, resp. $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$.

- a) Supposons que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ sont à termes positifs et convergentes. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \leq U_n V_n \leq W_{2n}$. En déduire que $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

- b) On suppose maintenant que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ sont absolument convergentes. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$ converge. Que vaut la somme ? *Indication : on pourra considérer la différence $|U_n V_n - W_n|$.*

3. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}$ est absolument convergente. On admet que la limite vaut e^x .
 b) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Que vaut le produit de Cauchy de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{y^k}{k!}$? En appliquant les résultats précédents, retrouver une propriété bien connue de l'exponentielle.

1. On remarquera que le produit de Cauchy généralise aux séries le produit classique entre deux sommes.

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications, 2025-2026
ANALYSE 3

Feuille de TD n°5

Fonctions : limites et continuité.

Exercice 1

Soient $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} / n \in \mathbb{N} \right\}$ et $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty}]-n - \frac{1}{n+1}, -n[$.

1. Représenter l'ensemble A . Montrer que 0 est adhérent à A . Montrer qu'il n'existe pas de suite de A qui tende vers $+\infty$.
2. Représenter l'ensemble B . Montrer qu'il existe une suite de B qui tend vers $-\infty$.

Exercice 2

Soient $f : x \mapsto \begin{cases} \tan(x) - 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \tan(x) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et $g : x \mapsto \begin{cases} \tan(x) - 1 & \text{si } x < 0 \\ \tan(x) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Donner le domaine de définition de f et tracer son graphe.
2. Déterminer si f admet une limite à gauche et une limite à droite en 0.
3. En déduire le domaine où f est continue.
4. La fonction g est-elle prolongeable par continuité ?
5. La fonction g est-elle localement bornée ?
6. La fonction f est-elle localement bornée ?

Exercice 3

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $T \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est localement bornée en 0 alors $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x - T)$ est localement bornée en T . Illustrer le raisonnement avec toutes les variables utilisées.
2. Montrer que si il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x_n)| > n$ alors f n'est pas localement bornée en 0. Illustrer le raisonnement.
3. Construire une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est pas localement bornée en 0.

Exercice 4 (Limites et monotonie)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :]-\infty, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes.

1. Montrer que si f n'est pas minorée alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$. Illustrer le raisonnement.
2. Montrer que si g n'est pas minorée alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$. Illustrer le raisonnement.
3. Montrer que si f est minorée alors f admet une limite finie à droite en a valant $\inf(\{f(x) / x \in]a, b[\})$, notée également $\inf_{x \in]a, b[} f(x)$. Illustrer le raisonnement.

Exercice 5 (Cours : composition des limites)

Soient $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$. Montrer, à partir des définitions, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) = 1$. Illustrer le raisonnement.

Exercice 6

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > 0$ et f continue en x_0 . Montrer, en retournant à la définition de la continuité, qu'il existe un intervalle $I \subset]a, b[$ voisinage de x_0 tel que pour tout $x \in I$, $f(x) > 0$. Illustrer le raisonnement.

Exercice 7

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est positive sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer alors que f est identiquement nulle. Illustrer le raisonnement.

Exercice 8

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}$ avec $u_0 \in]0, 1]$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.
3. Montrer que u est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x > B, \forall y > B, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

1. Montrer que si u est une suite réelle qui tend vers $+\infty$, alors $f(u)$ est une suite de Cauchy.
2. En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 10 (Cours : caractérisation séquentielle de la continuité)

1. Rappeler et démontrer la caractérisation séquentielle de la continuité.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ pour tout $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ quand $x = 0$.
 - a) Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D_f qui tend vers 0 et telle que la suite $f(u) = (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1.
 - b) Déterminer si f est continue en 0.
 - c) Montrer que pour tout $y \in [-1, 1]$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D_f qui tend vers 0 et telle que la suite $f(u)$ tend vers y .

Exercice 11 (Cours : stabilité de la notion de continuité)

Soient $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f et g sont continues en $x_0 \in D_f \cap D_g$.

1. Montrer alors que $f + g$ et fg sont continues en x_0 .
2. On suppose de plus que $g(x_0) \neq 0$. Montrer alors que $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 .

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction valant 1 sur $\mathbb{Q}$ et 0 sinon (f est dite fonction indicatrice des rationnels et se note $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$).

1. Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$. *Indication : on pourra étudier la continuité de f en $x \in \mathbb{R}$ en fonction de si $x \in \mathbb{Q}$ ou $x \notin \mathbb{Q}$.*

Exercice 13 (Cours : continuité et limites à gauche et à droite)

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$. On suppose que $x_0 \in \overline{]x_0 - 1, x_0[\cap D_f}$ et $x_0 \in \overline{]x_0, x_0 + 1[\cap D_f}$.

Démontrer que f est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ existent et valent $f(x_0)$.

Exercice 14

Déterminer les prolongements par continuité possibles des fonctions

1. $f :]0, 1[\cup]1, 2[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto E(x)$.
2. $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} \sin(|x|)$.
3. $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} \sin(|x|)$.

Exercice 15

Dire si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto \sin(x) \sin(\frac{1}{x})$.
2. $g : x \mapsto \frac{1}{x} \ln(\frac{e^x + e^{-x}}{2})$.
3. $h : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$.

Exercice 16

1. Soit $f : x \mapsto E(\frac{1}{x})$. Donner l'ensemble de définition de f . Que vaut la limite à droite et à gauche de f en 0 ? Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Soit $g : x \mapsto xE(\frac{1}{x})$. Donner l'ensemble de définition de g . Que vaut la limite à droite et à gauche de g en 0 ? Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 17

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 (Semi-continuité inférieure)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dira que f est semi-continue inférieurement en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, f(x) > f(x_0) - \varepsilon.$$

1. Montrer que si f est continue en x_0 alors f est semi-continue inférieurement en x_0 .
2. Est-ce que $\mathbb{1}_{]0, +\infty[}$ et $\mathbb{1}_{[0, +\infty[}$ sont continues sur $\mathbb{R}$? Sont-elles semi-continues inférieurement sur $\mathbb{R}$?
3. a) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle minorée. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \inf_{k \geq n} v_k$. Justifier que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que soit elle tend vers $+\infty$, soit elle est convergente. Dans les deux cas on notera $\liminf_{n \rightarrow +\infty} v_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sa limite.
 b) Montrer que f est semi-continue inférieurement en x_0 si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 , on a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \geq f(x_0)$.

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications, 2025-2026
ANALYSE 3

Feuille de TD n°6

Formules de Taylor-Young, développements limités.

Exercice 1

A partir des deux développements limités essentiels donnés au dessus, retrouver les développements limités (à l'ordre n quand ce n'est pas précisé) de base en 0 suivant (à connaître aussi) :

- | | |
|---|-----------------------------------|
| 1. $\frac{1}{1+x}$, | 5. $\cos(x)$, |
| 2. $\ln(1-x)$, | 6. $\sin(x)$, |
| 3. $\ln(1+x)$, | 7. DL ₃ de $\tan(x)$. |
| 4. DL ₃ , pour $\alpha \in \mathbb{R}$, de $(1+x)^\alpha$ | |

Exercice 2

A partir des deux développements limités essentiels donnés au dessus, trouver les développements limités (à l'ordre n quand ce n'est pas précisé) en 0 suivant :

- | | |
|--|---|
| 1. $\operatorname{ch}(x)$, | 4. sachant que $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donner un |
| 2. $\operatorname{sh}(x)$, | DL ₅ de $\arcsin(x)$, |
| 3. DL ₃ de $\operatorname{th}(x)$, | 5. $\arctan(x)$. |

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $\frac{\tan(x)}{\sqrt{x^2+4+x}-2}$ en 0, | 7. $\frac{\sqrt{\operatorname{ch}(x)}-1}{\sin(x)}$ en 0, |
| 2. $\frac{1-\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)-1}$ en 0, | 8. $(1+\ln(1+x^2))^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$ en 0, |
| 3. $\frac{1-\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)-1}$ en $\frac{\pi}{2}$, | 9. $\frac{\operatorname{ch}(x^3)-\cos(x)+\ln(\cos(x))}{x^4}$ en 0, |
| 4. $\sqrt{\log(1+x^2)} - \sqrt{\log(x^2-1)}$ en $+\infty$, | 10. $\frac{\ln(1-\sin(2x))}{\ln(1+\sin(5x))}$ en 0, |
| 5. $(n^2+1)^\alpha - (n^2-1)^\alpha$ quand $n \rightarrow +\infty$, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, | 11. $\frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{2(\operatorname{ch}(x)-1)}$ en 0. |
| 6. $(2e^x - e^{-x})^{\frac{1}{x}}$ en 0, | |

Exercice 4

Calculer les DL en 0 suivants :

- | | |
|--|--|
| 1. DL ₂ de $\sqrt{3+x}$, | 7. DL ₄ de $\frac{2}{e^{2x}-1} - \frac{1}{x}$, |
| 2. DL ₂ de $\ln 2 + x$, | 8. DL ₃ de $\frac{e^{\sin(x)}-1}{\cos(2x)}$, |
| 3. DL ₅ de $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$, | 9. DL ₃ de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, |
| 4. DL ₄ de $\frac{1}{\operatorname{sh}(x)} - \frac{1}{x}$, | 10. DL ₃ de $\frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1+x}}$, |
| 5. DL ₄ de $e^{1-\cos(x)}$, | 11. DL ₃ de $(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$, |
| 6. DL ₄ de $\operatorname{ch}(x) - \frac{4+x^2}{4-x^2}$, | 12. DL ₃ de $e^{3x} \sin(x)$. |

Exercice 5

Calculer les DL suivants :

1. DL_4 en 1 de $x^2 \ln(x)$,
2. DL_3 en $\frac{\pi}{4}$ de $\cos(x)$,
3. DL_3 en $\frac{\pi}{2}$ de $\sqrt{\sin(x)}$.

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications, 2025-2026
ANALYSE 3

Feuille de TD n°7

Fonctions : continuité sur un intervalle et sur un segment, continuité uniforme.

Exercice 1 (Cours : théorème des valeurs intermédiaires - formulation alternative)

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Rappeler l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.
2. Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $I \subset D_f$ un intervalle. Montrer alors que $f(I)$ est un intervalle.

Exercice 2

Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. a) Montrer que si f est strictement monotone alors f est injective.
b) En déduire que si f est strictement monotone, $f : I \rightarrow f(I)$ est une bijection.
2. On suppose désormais que f est continue. Montrer que si f est injective alors f est strictement monotone.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 3

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\ell > 0$ tel que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\ell$. Montrer qu'il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = 0$. Illustrer graphiquement le raisonnement.

Exercice 4 (Zéro d'une fonction polynomiale généralisée)

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k g(x)^k$ avec $a_k \in \mathbb{R}$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $a_n \neq 0$ et n impair.

1. Déterminer si g est croissante.
2. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Cette conclusion est-elle toujours vraie si g admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$?
4. On suppose g bijective. Est-ce que x_0 est forcément unique?

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \geq \alpha |x - y|.$$

1. Montrer que f est strictement monotone.
2. Montrer que $|f|$ admet comme limite $+\infty$ en $\pm\infty$.
3. a) Montrer que si f est de signe constant, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
b) En déduire que f n'est pas de signe constant. Illustrer graphiquement le raisonnement.
4. Montrer que f est bijective. Illustrer graphiquement le raisonnement.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que f admet des limites finies en $\pm\infty$. Montrer que f est bornée. Illustrer graphiquement le raisonnement.
2. On suppose maintenant que f est périodique. Montrer aussi que dans ce cas, f est bornée.

Exercice 7

Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) + m < g(x)$. Illustrer graphiquement l'énoncé.

Exercice 8

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que

1. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et convergeant vers 0, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
2. Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et convergeant vers 0, $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite indépendante de la suite u .
3. Montrer que f est prolongeable en une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue.

Exercice 10

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est K -lipschitzienne, avec $K \geq 0$, c'est-à-dire

$$\forall x, x' \in D_f, \quad |f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|.$$

1. Montrer que f est uniformément continue sur D_f .
2. a) Montrer que $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction lipschitzienne sur tout $[\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$.
b) Montrer que $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11

Soient I un intervalle fermé et $f : I \rightarrow I$ une fonction λ -lipschitzienne avec $\lambda < 1$.

1. On suppose que $\lambda < 1$ (on dit alors que f est λ -contractante). Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - a) Justifier que u est bien définie.
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - u_n| \leq \lambda^n |u_1 - u_0|$.
 - c) En déduire que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{\lambda^n - \lambda^{n+p}}{1 - \lambda} |u_1 - u_0|.$$

- d) Montrer que u est une suite de Cauchy.
- e) Montrer que u converge dans I . Notons $\ell \in I$ sa limite, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - u_0|}{1 - \lambda} \lambda^n.$$

- f) Montrer que f admet un point fixe et qu'il est nécessairement unique. *C'est le théorème du point fixe de Banach-Picard.*
 - g) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 1}$ converge vers le nombre d'or.
2. Soit $g : I \rightarrow I$ une fonction. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $0 < \lambda < 1$ tel que $g^k = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{k \text{ fois}}$ est λ -lipschitzienne. Montrer alors que g admet un unique point fixe.

Exercice 12

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue satisfaisant

$$\forall x, y \in [a, b], x \neq y, \quad |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

1. Le théorème du point fixe de Banach-Picard est-il applicable ?
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, est une suite convergente. *Indication : on pourra s'intéresser à ses valeurs d'adhérence.*
3. En déduire que f admet un unique point fixe.

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications, 2025-2026
ANALYSE 3

Feuille de TD n°8

Fonctions : dérivabilité.

Exercice 1

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser, dans chacun des cas suivants, le domaine sur lequel la fonction est dérivable et calculer la dérivée.

1. $f(x) = \sin(3g(x^2))$,
2. $f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$,
3. $f(x) = (g(x)^3 + 1)^{\sqrt{x}}$,
4. $f(x) = \arccos(\ln(x^2))$.

Exercice 2

Soit $f : t \mapsto \frac{\sin(3t)}{t}$. Donner le domaine de définition de f , étudier l'éventuel prolongement par continuité, puis déterminer si ce prolongement est de classe C^1 .

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction que l'on note $\tilde{f}$.
3. Montrer que $\tilde{f}$ admet un DL₂ en 0.
4. En déduire que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que $\tilde{f}$ n'est pas deux fois dérivable en 0. *Indication : on pourra étudier le taux d'accroissement de $\tilde{f}'$ en 0.*

Exercice 4

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2.$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ pour tout $x \geq 0$ et $f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{-x})$ pour tout $x < 0$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en 0. Puis dérivable en 0.
4. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 6

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur $]a, b]$ et telle que f' admet une limite (à droite) en a .

1. Montrer que f' est bornée sur un voisinage de a dans $]a, b]$.
2. En déduire que f est λ -lipschitzienne sur un voisinage de a dans $]a, b]$, pour un certain $\lambda > 0$.
3. Montrer que f est uniformément continue sur $]a, b]$.
4. (★) En déduire que f est prolongeable par continuité en a . On notera $\tilde{f}$ le prolongement.
5. (★) Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable (à droite) en a , puis de dérivée continue en a .

Nous avons montré que f est prolongeable en a en une fonction dérivable sur $[a, b]$ et à dérivée continue en a . C'est le théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 7

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction N fois dérivable sur $[a, b]$ et qui s'annule en $N + 1$ points, avec $N \geq 1$. Montrer que $f^{(N)}$ s'annule au moins une fois.

Exercice 8

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9

Appliquer le théorème des accroissements finis à $f : x \in]1, +\infty[\mapsto \ln(\ln(x))$ sur $[k, k+1]$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et en déduire que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$ et que $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln(k)}$ est divergente.

Exercice 10 (Règle de l'Hôpital et formule de Taylor-Young)

Soit I un intervalle contenant au moins deux points distincts.

Partie I.

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I .

1. Soit $a, b \in I$, $a < b$. On pose

$$\varphi : t \in [a, b] \mapsto (f(b) - f(a))(g(t) - g(a)) - (f(t) - f(a))(g(b) - g(a))$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

C'est le théorème des accroissements finis généralisés.

2. Application 1. Démontrer le théorème des accroissements finis à partir du résultat précédent.

3. Application 2. Soit $x_0 \in I$. On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que g, g' ne s'annulent pas sur $I \setminus \{x_0\}$.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. C'est la règle de l'Hôpital.

Partie II.

Soit $x_0 \in I$. On souhaite montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété : pour toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant une dérivée d'ordre n en x_0 , on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^n} \left(f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^n f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \right) = 0.$$

1. Montrer que la propriété est vraie au rang $n = 1$.

2. On suppose la propriété vraie au rang n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant une dérivée d'ordre $n + 1$ en x_0 . Soit $h : x \in I \mapsto f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n+1} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}$ et $g : x \in I \mapsto \frac{\varepsilon}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$.

a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$, on a $|h'(x)| \leq |g'(x)|$.

b) En appliquant le TAF généralisé, terminer la récurrence.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $f(0) > 0$, $f'(0) > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. On se propose de construire par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_+$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x_n) = 0$.

1. Construire x_1 .

2. Hérédité : on suppose construits $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ vérifiant l'hypothèse souhaitée.

a) Raisonner par l'absurde et montrer que $f^{(n)}$ est soit strictement croissante et strictement positive, soit strictement décroissante et strictement négative.

b) En appliquant un développement de Taylor-Lagrange en $a > x_n$ pour tout $x > a$, obtenir une contradiction.

Exercice 12

Soit P une fonction polynomiale de degré impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}| \leq |P|$.

1. Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $P(x_0) = 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]x_0, x[$ tel que $|f(x)| \leq |P(c_n)| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$.
3. En déduire que $f = 0$.